Komutacioni sistemi
(vježbe termin 5)

Prof.dr Igor Radusinović
igorr@ucg.ac.me

Slavica Tomović
Igor Radusinović
Univerzitet Crne Gore

Primjer 1

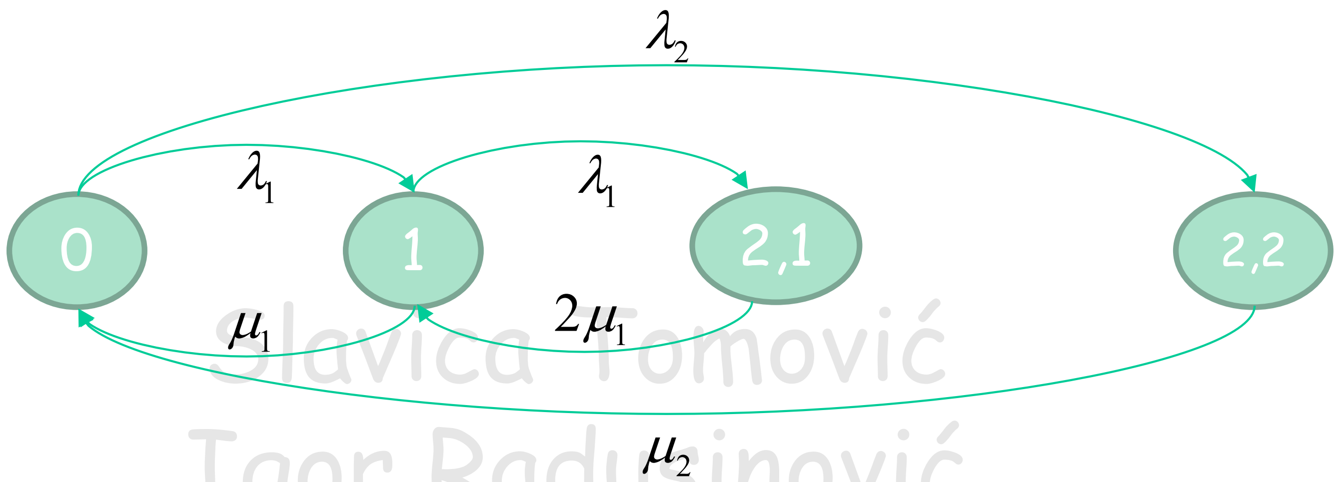
- Posmatra se PBX sa dvije odlazne linije, i postoje dva tipa telefonskih poziva.

  Tip 1: telefonski poziv zahtijeva jednu odlaznu liniju. Dolazni proces je Poasonov sa srednjom dolaznom brzinom λ_1 i trajanjem poziva sa eksponencijalnom raspodjelom parametra μ_1.

  Tip 2: telefonski poziv zahtijeva dvije odlazne linije. Dolazni proces je Poasonov sa srednjom dolaznom brzinom λ_2 i trajanjem poziva sa eksponencijalnom raspodjelom parametra μ_2.

  Modelovati sistem i odrediti vjerovatnoću blokiranja za oba tipa poziva.

Primjer 1



$$(\lambda_1 + \lambda_2)P_o = \mu_1 P_1 + \mu_2 P_{2,2}$$

$$\lambda_1 P_o + 2\mu_1 P_{2,1} = (\lambda_1 + \mu_1)P_1$$

$$\lambda_2 P_o = \mu_2 P_{2,2} \Rightarrow P_{2,2} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} P_o \qquad P_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} P_o \qquad P_{2,1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^2 P_o$$

Primjer 1

$$\sum_i P_i = 1$$

$$P_o + \frac{\lambda_1}{\mu_1} P_o + \frac{\lambda_2}{\mu_2} P_o + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^2 P_o = 1$$

$$\Rightarrow P_o = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^2}$$

$$P_{B1} = P_{2,1} + P_{2,2}$$

$$P_{B2} = P_1 + P_{2,1} + P_{2,2}$$

Primjer 2

Telekomunikacioni operator ima dva paralelna linka kapaciteta 5Mb/s. Poruke koje dolaze se karakterišu Poasonovom raspodjelom parametra λ=20 poruka/s. Poruke se sa jednakom vjerovatnoćom prosleđuju na oba linka (veličina poruke je 100Kb). Svaki link ima bafere neograničene veličine.

Odrediti srednje kašnjenje poruke. Ukoliko operator zamijeni dva linka sa jednim linkom kapaciteta 10 Mb/s, odrediti srednje kašnjenje i uporediti sa prethodnim slučajem.

Primjer 2

Scenario sa dva linka:

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{2} = 10\, por/s$$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda}{2} = 10\, por/s$$

$$\mu = \frac{5Mb/s}{100kb/por} = 50\, por/s$$

$$T = \frac{N}{\lambda/2},\ N = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$T = \frac{2N}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}\left(\frac{\frac{\lambda}{2\mu}}{1-\frac{\lambda}{2\mu}}\right) = 0.025s$$

Primjer 2

Scenario sa jednim linkom: M/M/1

$$\lambda^{'} = \lambda = 20\, por / s$$

$$\mu^{'} = 2\mu = 10\, por / s$$

$$\rho^{'} = \frac{\lambda^{'}}{\mu^{'}} = \frac{\lambda}{2\mu} = \rho$$

$$T^{'} = \frac{N^{'}}{\lambda^{'}},\ N^{'} = \frac{\rho^{'}}{1-\rho^{'}}$$

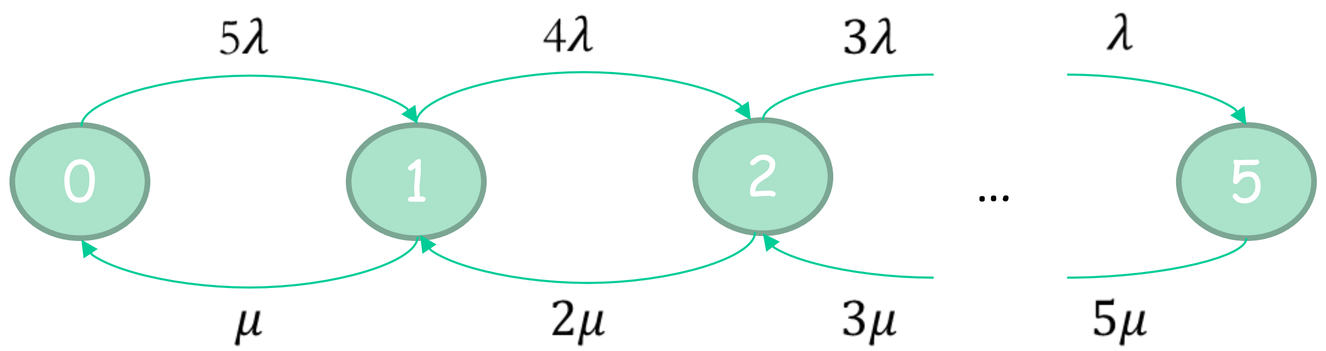
$$T^{'} = \frac{T}{2} = 0.0125s$$

Primjer 3

- Posmatra se izvor video saobraćaja varijabilne brzine signliziranja, koga karakteriše Markovljev lanac dat na slici. Izvor može biti u jednom od 6 stanja, $i = 0,1,\ldots 5$. Kada je u stanju *i* izvor generiše saobraćaj brzine iV b/s.

  Odrediti vjerovatnoće stanja u funkciji λ i μ.

  Odrediti srednju brzinu signaliziranja i odnos maksimalne i srednje brzine signaliziranja.



$$5\lambda P_o = \mu P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{5\lambda}{\mu} P_o = \binom{5}{1} \frac{\lambda}{\mu} P_o$$

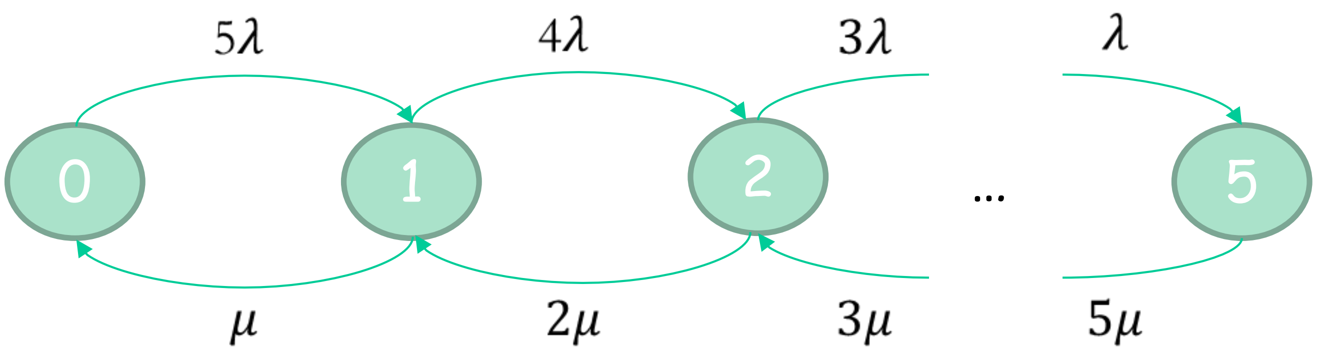
$$4\lambda P_1 = 2\mu P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{4\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{4\lambda 5\lambda}{2\mu\mu} P_o = \binom{5}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_o$$

$$\vdots$$

$$\lambda P_4 = 5\mu P_5 \Rightarrow P_5 = \frac{\lambda}{5\mu} P_4 = \binom{5}{5} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 P_o$$

$$\sum_i P_i = 1 \Rightarrow P_o = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{5} \frac{P_i}{P_o}} = \frac{1}{\sum_{i=o}^{5} \binom{5}{i} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^5}$$

$$\boxed{P_i = \frac{\binom{5}{i} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}{\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^5}}$$



$$R = \sum_{i=0}^{5} iVP_i = V\sum_{i=0}^{5} \frac{\binom{5}{i}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}{\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)^5} i = VN$$

$$N = P^{'}(z=1)$$

$$P(z) = \sum_{i=0}^{5} z^i \binom{5}{i}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-5} = \left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-5} \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i}\left(\frac{z\lambda}{\mu}\right)^i = \left(\frac{\mu + z\lambda}{\mu+\lambda}\right)^5$$

$$P^{'}(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{\mu + z\lambda}{\mu+\lambda}\right)^5 = \frac{5(\mu + z\lambda)^4 \lambda}{(\mu+\lambda)^5}$$

$$P^{'}(z=1) = \frac{5\lambda}{\mu+\lambda}$$

$$R = \frac{5\lambda}{\mu+\lambda} V$$

$$R_{\max} = 5V$$

Primjer 4

U firmi je 1000 korisnika vezano preko PBX-a na server, pri čemu svi generišu saobraćaj intenziteta 30mE. Odrediti potreban broj kanala tako da vjerovatnoća blokiranja bude 3%.

Ukoliko se broj korisnika poveća na 1300, odrediti potreban broj kanala uz istu vjerovatnoću greške.

Uporediti procente povećanja intenziteta saobraćaja i potrebnog broja kanala.

a)

$$N_k = 1000$$

$$A_i = 0.03E$$

$$A = 1000 \cdot 0.03E = 30E$$

$$P_B = 0.03$$

$$S = 38$$

b)

$$A = 39$$

$$S = 47$$

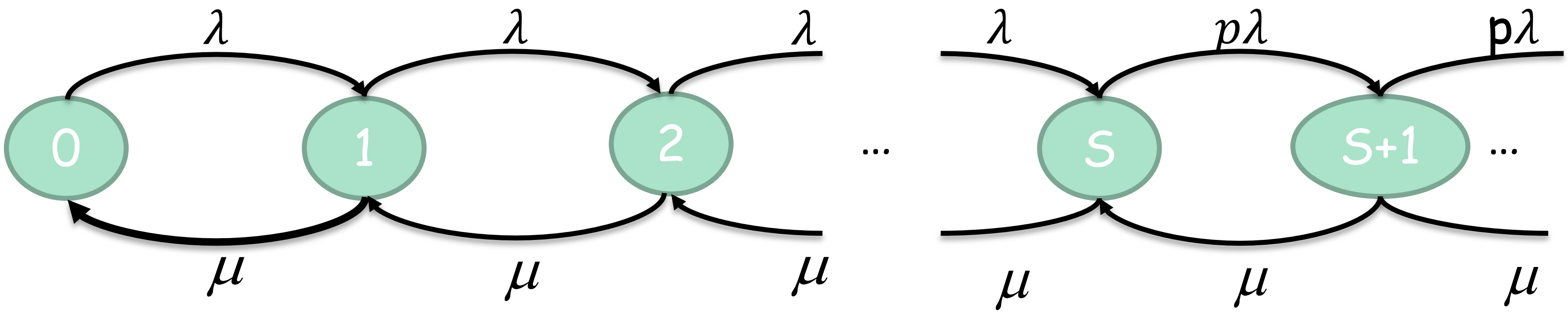
$$\Delta A_{\%} = \frac{47 - 38}{38} \cdot 100 = 23.7\%$$

Primjer 5

Na ulaz u bafer dolaze poruke sa Poasonovom raspodjelom paramatra λ.

Eksponencijalno je vrijeme posluživanja parametra μ.

Bafer primjenjuje autoregulacionu tehniku, tako da kada je broj poruka u baferu veći od S-1, svaki novi dolazak će biti odbačen sa vjerovatnoćom 1-p. Modelovati dati sistem i odrediti vjerovatnoću blokiranja.



$$P_B = \sum_{i=S}^{\infty}(1-p)P_i$$

$$\lambda P_o = \mu P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu}P_o = AP_o$$

$$\lambda P_1 = \mu P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{\lambda}{\mu}P_1 = A^2 P_o$$

$$\vdots$$

$$\lambda P_{S-1} = \mu P_S \Rightarrow P_S = \frac{\lambda}{\mu}P_{S-1} = A^S P_o$$

$$p\lambda P_S = \mu P_{S+1} \Rightarrow P_{S+1} = \frac{p\lambda}{\mu}P_S = pA^{S+1}P_o$$

$$p\lambda P_{S+1} = \mu P_{S+2} \Rightarrow P_{S+2} = \frac{p\lambda}{\mu}P_{S+1} = p^2 A^{S+2}P_o$$

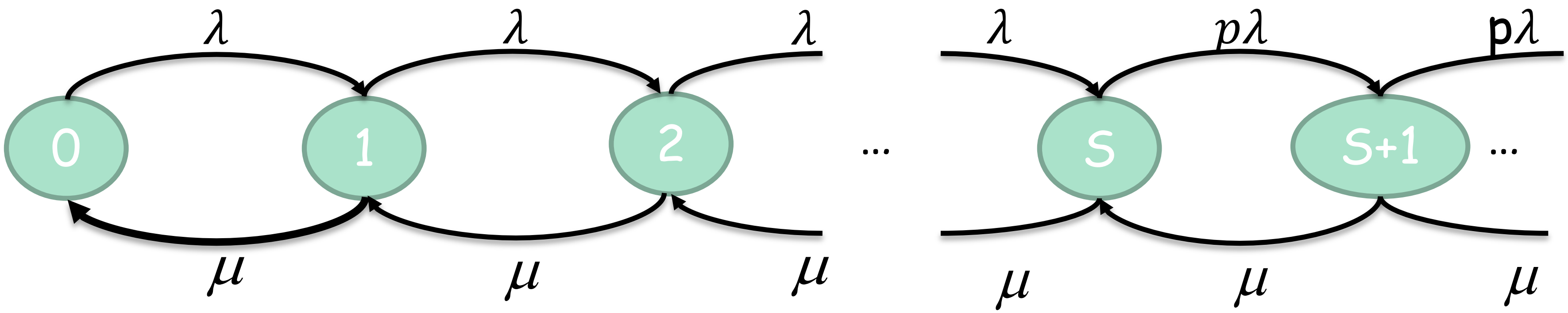
$$\sum_i P_i = 1$$

$$P_o + \sum_{i=1}^{S-1} A^i P_o + \sum_{i=S}^{\infty} p^{i-S} A^i P_o = 1$$

$$P_o\left(\sum_{i=0}^{S-1} A^i + \sum_{i=0}^{\infty} p^i A^i A^S\right) = 1$$

$$P_o\left(\frac{1-A^s}{1-A} + \frac{A^S}{1-pA}\right) = 1$$

$$P_o = \frac{1}{\left(\frac{1-A^s}{1-A} + \frac{A^S}{1-pA}\right)}$$



$$P_B = \sum_{i=S}^{\infty}(1-p)P_i = (1-p)P_o\sum_{i=S}^{\infty}p^{i-S}A^i = (1-p)P_o\frac{A^S}{1-pA}$$

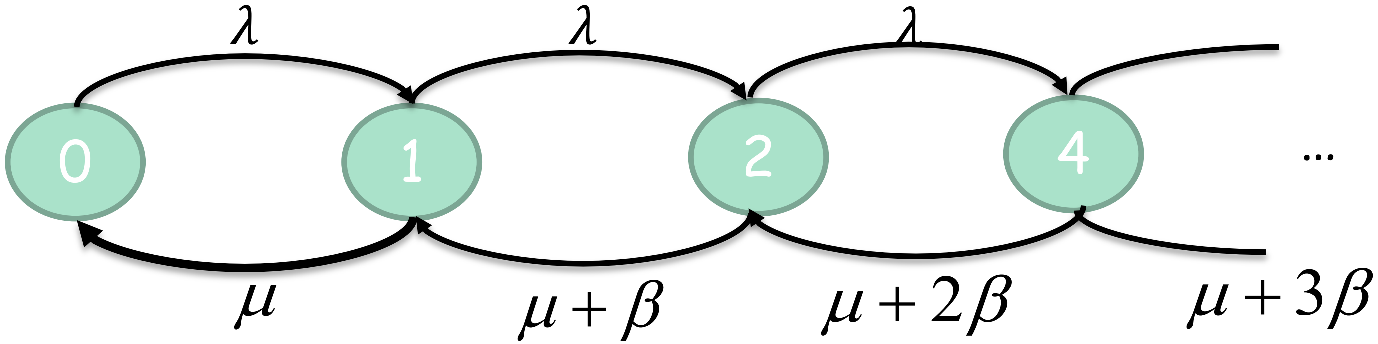
Primjer 6

Na ulaz u bafer dolaze poruke sa Poasonovom raspodjelom parametra λ. Vrijeme posluživanja ima eksponencijalnu raspodjelu parametra μ.

Svaka poruka čeka na servis neko maksimalno određeno vrijeme (deadline), u suprotnom se uklanja iz bafera. Maksimalno vrijeme čekanja se modeluje eksponencijalnom raspodjelom parametra β.

Modelovati sistem.

Odrediti srednji broj poruka u baferu.

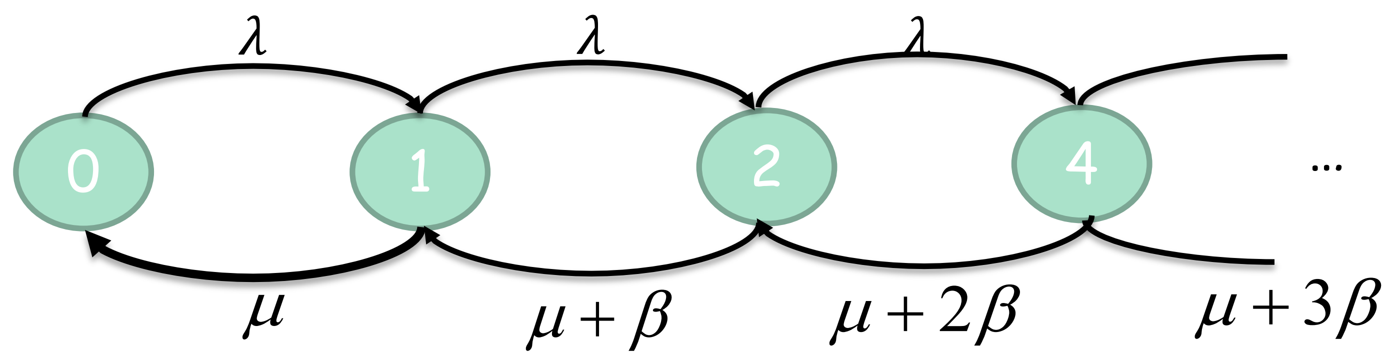


$$\lambda P_o = \mu P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_o$$

$$\lambda P_1 = (\mu+\beta) P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{\lambda}{\mu+\beta} P_1 = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu+\beta)} P_o$$

$$\vdots$$

$$\lambda P_2 = (\mu+2\beta) P_3 \Rightarrow P_3 = \frac{\lambda}{\mu+2\beta} P_2 = \frac{\lambda^3}{\mu(\mu+\beta)(\mu+2\beta)} P_o$$



$$P_i = \frac{\lambda^i}{\prod_{i=0}^{i-1}(\mu + i\beta)} P_o$$

$$P_o = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{\prod_{i=0}^{i-1}(\mu + i\beta)}}$$

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} i P_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i\lambda^i}{\left(\prod_{i=0}^{i-1}(\mu + i\beta)\right)\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{\prod_{i=0}^{i-1}(\mu + i\beta)}\right)}$$

Primjer 7 (za domaći)

Na ulaz u bafer dolaze poruke sa Poasonovom raspodjelom parametra λ. Postoje dva servera. Vrijeme posluživanja svakog je eksponencijalno parametra μ.

Modelovati sistem.

Odrediti srednji broj poruka i srednje kašnjenje poruka.

Može li bafer sa srednjim vremenom posluživanja od 2s (svakog servera), da podrži ulazni saobraćaj koji se karakteriše sa λ=10 poruka/s.